

Квантовая механика. Физический факультет, 3 курс, 6 семестр.

Занятие №1. Математический аппарат квантовой механики: Линейная алгебра, теория линейных пространств, теория линейных операторов.

1. Определение линейного (аффинного) пространства. Примеры линейных пространств.
2. Линейная комбинация векторов. Линейная зависимость и линейная независимость векторов. Размерность линейного пространства. Базис.
3. Евклидовы пространства. Скалярное произведение. Нормировка и ортогональность векторов. Ортонормированный базис. Примеры скалярных произведений.
4. Гильбертово пространство. Пространство L^2 . Понятие полной системы функций для бесконечномерных пространств.
5. Определение линейного оператора $\hat{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha \hat{L}f + \beta \hat{L}g$.

Задача 1. Проверить линейность следующих операторов (из ГКК № 1.1):

- а) $\hat{I}\psi(x) = \psi(-x)$ – оператор инверсии (отражения);
 - б) $\hat{T}_a\psi(x) = \psi(x + a)$ – оператор трансляции (сдвига);
 - в) $\hat{M}_c\psi(x) = \sqrt{C}\psi(Cx)$, $C > 0$ – оператор изменения масштаба;
 - г) $\hat{K}\psi(x) = \psi^*(x)$ – оператор комплексного сопряжения;
 - д) $\hat{P}_{12}\psi(x_1, x_2) = \psi(x_2, x_1)$ – оператор перестановки двух координат.
6. Способы задания линейных операторов: правило соответствия, интегральная форма, матричная форма.
 7. Действия с операторами.
 - 7.1. Единичный оператор, нулевой оператор.
 - 7.2. Сумма операторов.
 - 7.3. Произведение операторов.
 - 7.4. Коммутатор двух операторов.
 - 7.5. Обратный оператор. Нормальный оператор.

Задача 2. Найти оператор, обратный к произведению операторов \hat{A} и \hat{B} ,
 $(\hat{A}\hat{B})^{-1} - ?$

7.6. Определение эрмитово сопряженного оператора.

Задачи 3-5. Показать, что $(\hat{L}^\dagger)^\dagger = \hat{L}$; $(\alpha\hat{L})^\dagger = \alpha^* \hat{L}^\dagger$; $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger$.

7.7. Определение эрмитова оператора.

7.8. Определение унитарного оператора.

8. Уравнение на собственные функции (СФ) и собственные значения (СЗ)

$$\hat{A}\psi = \lambda\psi$$

8.1. Свойства СЗ и СФ эрмитова оператора.

8.2. Свойства СЗ унитарного оператора.

Задача 6. Раскрыть скобки в операторном выражении $\left(x + \frac{d}{dx}\right)^2$ (Гр. №8(a))

Домашнее задание: ГКК 1.1-1.10, Гр. №8, №9

1. Для всех операторов из задачи ГКК 1.1 (см. **задачу 1**) найти эрмитово сопряженные и обратные операторы.

2. Найти операторы, эрмитово сопряженные к операторам:

а) $\frac{d}{dx}$, $i\frac{d}{dx}$, $-\infty < x < \infty$; б) $i\frac{\partial}{\partial r}$, $0 \leq r < \infty$ (ГКК 1.2)

3. Проверить эрмитовость следующих операторов:

а) $\hat{L}^\dagger \hat{L}$, $\hat{L} \hat{L}^\dagger$, $\hat{L} + \hat{L}^\dagger$, $i(\hat{L} - \hat{L}^\dagger)$ (ГКК 1.3)

б) $\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$, $i(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})$, если \hat{A} и \hat{B} – эрмитовы операторы. (ГКК 1.6)

4. Показать, что если \hat{C} – эрмитов оператор, то оператор $\hat{G} = \hat{A}\hat{C}\hat{A}^\dagger$ также является эрмитовым. (ГКК 1.4)

5. Показать, что произвольный оператор можно представить в виде $\hat{F} = \hat{A} + i\hat{B}$, где \hat{A} и \hat{B} – эрмитовы операторы. (ГКК 1.5)

6. Оператор \hat{F} неэрмитов. В каком случае оператор \hat{F}^2 является эрмитовым? (ГКК 1.7)

7. Показать, что при алгебраических действиях с коммутаторами справедлив закон дистрибутивности, т.е. что коммутатор суммы равен сумме коммутаторов $\hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$ (ГКК 1.8)

$$\left[\sum_i \hat{A}_i, \sum_k \hat{B}_k \right] = \sum_{i,k} [\hat{A}_i, \hat{B}_k].$$

8. Показать, что

$$\begin{aligned} [\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] &= \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}; \\ [\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] &= \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}; \end{aligned} \quad (\text{ГКК 1.9})$$

9. Доказать тождество Якоби для коммутаторов операторов $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$:

$$[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0.$$

10. Раскрыть скобки в операторных выражениях (Гр. № 8(б-е)):

б) $\left(\frac{d}{dx} + \frac{1}{x}\right)^3$; в) $\left(x\frac{d}{dx}\right)^2$; г) $\left(\frac{d}{dx}x\right)^2$; д) $[i\hbar\nabla + \vec{A}(\vec{r})]^2$;

е) $(\hat{L} - \hat{M})(\hat{L} + \hat{M})$.

11. Найти коммутаторы операторов:

а) x и $\frac{d}{dx}$; б) $i\hbar\nabla$ и $\vec{A}(\vec{r})$; в) $\frac{\partial}{\partial\varphi}$ и $f(r, \theta, \varphi)$. (Гр. № 9)

ГКК - Галицкий Е.М., Карнаков Б.М., Коган В.И. Задачи по квантовой механике, 1981
Гр. - Гречко Л.Г., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Сборник задач по теоретической физике, 1984